

6 סיכום

6.1 שיטת איתור ומיון היריעות

שיטת איתור ומיון היריעות המוצעת בעבודה זו מבוססת על תכונותיהן של היריעות שהינן מחזוריות אינסופיות ומחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

תכונת מחזוריות היריעות מצביעה על הקשר בין היריעות לבין חבורות הסימטרייה וכל התופעות המסודרות במרחב.

מחזוריות היריעות, משמעותה – קיום יחידת "יריעה בסיסית" הכלואה ביחידת "מרחב בסיסי" אשר כל תכונות היריעה מתקיימת בה, ובעזרתה ניתן לשחזר את היריעה כולה.

קיומם של "מרחבים בסיסיים" (E.P.R.) אשר כל תכונות המרחב מיוצגות בהם, וכן קיומו של תהליך שכפול המבוסס על חבורות הסימטרייה של המרחב, הם הבסיס שעליו מבוססת שיטת איתור ומיון היריעות הנדונות. ב"מרחב בסיסי" אשר מכיל "פיסת יריעה בסיסית", המייצגת אחת מן היריעות הנדונות, - תהיינה מיוצגות תכונות היריעה.

"מרחב בסיסי" כזה, המייצג מרחב אשר בו מתקיימת יריעה המחלקת אותו לשני תת-מרחבים זהים, יכול בתוכו את המייצגים הבאים:

1. "יחידת יריעה בסיסית" – קטע המשטח הקטן ביותר (לא ניתן לחלוקה נוספת) הכלוא בין דפנות "המרחב הבסיסי" ומחלק את נפחו לשני תת-נפחים זהים.
2. ציר או מספר צירי סיבוב של 180^0 (2-fold) המסובבים את "המרחב הבסיסי" לתוך עצמו, דהיינו: מסובבים תת-נפח אחד לתוך תת-נפח המשלים-זהה לו.
3. כל סוגי הקדקודים של זוג רשתות המנהרות הדואליות והצלעות המקשרות ביניהם. הייצוג לכל אחת מן הרשתות בתוך "המרחב הבסיסי יהיה "בצד אחר של "פיסת היריעה הבסיסית".

איתורם של המרחבים הבסיסיים, המכילים ציר או מספר צירי 2-fold, מבין סך המרחבים הבסיסיים, ושכפולם - יובילו למציאתן של רשתות אשר כל צלעותיהן נמצאות בתוך ישרים אינסופיים המהווים צירי סיבוב של 180^0 . רשתות אלה מכונות "רשתות 2-fold".

תהליך איתור רשתות ה-2-fold אמור למצות את מספרן של רשתות אלה. מספרם של המרחבים הבסיסיים העשויים להכיל ציר או מספר צירי 2-fold, המסובבים אותם לתוך עצמם, הוא מספר סופי. מסקנה זו מבוססת על העובדה, שקבוצת המרחבים הבסיסיים המכילים צירי 2-fold, כאמור, הם תת-

קבוצה בתוך קבוצת המרחבים הבסיסיים המייצגים את חבורות הסימטרייה, אשר מספרם גם הוא סופי –
230.

מבחינה גיאומטרית-פיזית, מספרם של המרחבים הבסיסיים קטן בהרבה. הסיבה לכך היא, ש"מרחבים בסיסיים" זהים בצורתם עשויים להיות המייצגים של חבורות סימטרייה שונות.

רשתות ה-2-fold, הנוצרות משכפול המרחבים הבסיסיים המכילים צירי 2-fold, הן מחזוריות, ובהן ניתן לאתר יחידות מחזוריות שונות מאשר קטע הרשת הכלוא בתוך המרחב הבסיסי. בעבודתנו, איתרנו ברשתות ה-2-fold תאים מחזוריים סגורים, המורכבים מקטעי צירי הרשת, אשר "פיסת יריעה" מחזורית כלואה בתוכם. מכיוון שרשתות ה-2-fold כולן מוכלות בתוך היריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, "פיסת היריעה" הכלואה בתוך התא המרחבי הסגור של רשת צירי ה-2-fold, היא יחידה מחזורית אשר שכפולה יוביל לבניית היריעה כולה.

"פיסת היריעה", הכלואה בתוך התא הסגור של רשת צירי ה-2-fold, היא שלמה ורציפה, באופן כזה שלא ניתן לעבור מצידה האחד של "פיסת היריעה" לצידה האחר מבלי לחצות את גבולות התא הסגור התחום על-ידי צירי ה-2-fold.

התאים המחזוריים הסגורים של רשתות ה-2-fold והיריעה מופיעים בשני אופנים:

1. "פיסת יריעה" הכלואה בתוך מצולע מרחבי סגור.
2. "פיסת יריעה" הכלואה בין שני מצולעים סגורים. תא זה מכונה "תא מצולע מפוצל".

בתאים הסגורים מן הסוג הראשון, ניתן לכלוא "פיסת יריעה", מן הבחינה הטופולוגית, בדרך אחת בלבד. בעבודתנו הצגנו את "פיסת היריעה" כמשטח מינימלי, דהיינו: משטח קרום תמיסת סבון הכלוא בתוך המצולע המרחבי הסגור שהיה מתקבל מטבילתו של המצולע בתוך תמיסת סבון. משטח זה מכונה "משטח תמיסת סבון".

בתאים סגורים מן הסוג השני ניתן לכלוא "פיסת יריעה בשני אופנים", האחת – משטח תמיסת סבון (המשטח המינימלי) הכלוא בין המצולעים, והשניה – יריעה שלמה ורציפה הכוללת בתוכה קטעים טורוהידרליים. צורה זו של כליאת המשטח בתוך "התאים המפוצלים" הובילה למציאת משפחה חדשה של יריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. משפחת יריעות זו כינינו בשם "יריעות מרובות השרוולים".

האבחנה הטופולוגית בין היריעות השונות נעשתה באמצעות רשתות המנהרות שהיריעות יוצרות, דהיינו: יריעות תקראנה שונות טופולוגית זו מזו כאשר רשתות המנהרות שלהן הינן שונות טופולוגית זו מזו, יריעות תקראנה יריעות זהות טופולוגית כאשר רשתות המנהרות שלהן תהיינה זהות טופולוגית.

התאים המחזוריים הסגורים (משני הסוגים) אשר בתוכם הייתה כלואה "פיסת יריעה" מינימלית הניבו שמונה יריעות, המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, השונות טופולוגית זו מזו; שמונת היריעות האלה הינן ייחודיות, ובהתאם לכך הינן כלולות במשפחה ייחודית אותה כינינו "משפחת יריעות קרום תמיסת הסבון".

הדרך הנוספת לכליאת "פיסת יריעה" בתוך "התאים המפוצלים" הובילה למציאתה של משפחת "יריעות מרובות העמודים". משפחת יריעות חדשה זו היא משפחה בעלת אינסוף יריעות, השונות טופולוגית זו מזו, והמחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. **משמעות הדבר היא, כי קיימות אינסוף רשתות מרחביות אשר הינן דואליות-משלימות זהות זו לזו.**

6.2 סימון היריעות

בעבודתנו הצענו דרך לסימון היריעות, המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, על פי רשתות המנהרות שלהן. הבחירה בסימון רשתות המנהרות נבעה מן העובדה, כי רשתות אלה הן האמצעי להבחנה טופולוגית בין היריעות.

סימון הרשתות יכול להיעשות בשני אופנים:

1. על פי קדקודי הרשת: סימון הקדקודים השונים והיחס ביניהם, עשוי לספק מידע מסוים על הרשתות, אך לא מספקת המאפשרת את שחזורם.
2. סימון הגופים האורזים של הרשת: סימון הנותן מידע מדויק על הגופים האורזים של הרשת, אשר צלעותיהם מהוות את צלעות הרשת, יספק מידע מלא שיאפשר את שחזור הרשת ותאורה.

בהשוואה בין שתי החלופות, מצאנו כי החלופה השנייה מספקת את מירב המידע. המידע שאותו מספקת שיטת סימון זו הוא המידע מפורט מטה:

1. מספר הגופים האורזים השונים זה מזה, דהיינו: מספר סוגי הקדקודים השונים של הרשת.
2. סוג הפיאות ומספר הפיאות הנפגשות בקדקוד.
3. מספר הקדקודים של כל אחד מן הגופים האורזים.
4. מספר הצלעות של כל אחד מן הגופים, מידע אותו ניתן להסיק משיטת הסימון.
5. מספר הפיאות של כל גוף וגוף. מידע שניתן להסיקו ממספרן של צלעות הגוף וממספרם של קדקודי הגוף.

מידע זה, המובא בשיטת הסימון שהוצעה, אמור לאפשר לתאר את צורתם הגיאומטרית של הגופים האורזים, ועל פיהם - לתאר את רשתות המנהרות. מכאן - קלה הדרך למציאת היריעה המפרידה ביניהם.

שיטת סימון זו הודגמה על ידי סימון של שמונת רשתות המנהרות המפרידות בין שמונת היריעות המשותיכות למשפחת "יריעות קרום תמיסת הסבון". ככל שהרשתות מורכבות יותר, דהיינו: מספר סוגי הקדקודים הולך וגדל, כך נעשה הסימון מסורבל יותר, וככל שסוגי הפיאות רב יותר, כך יקשה יותר לשחזר את הגופים האורזים. השיטה לוקה במספר נקודות חולשה:

1. תאור הפיאות הלא רגולריות - פיאות של מצולעים מישוריים לא רגולריים ופיאות של מצולעים מרחביים, אינו מדויק. השיטה מתארת, אומנם, את מספר הצלעות של כל אחת מן הפיאות הלא רגולריות, אך אינה מספקת כל מידע על היחסים בין הצלעות - היחס בין אורכיהן והזווית בין כל שתי צלעות סמוכות.
2. אפשרות לקיומן של פיאות בעלות אותו מספר צלעות, השונות בצורתן הגיאומטרית זו מזו באותו הגוף, לדוגמה: שני משושים מרחביים השונים זה מזה.
3. בגופים בעלי יותר מסוג אחד של קדקודים, אין השיטה מספקת מידע על סדר הופעתם. כאשר מספר הקדקודים אינו גדול ניתן יהיה עדין להגיע לרשת הדרושה ככל שיגדל מספר סוגי הקדקודים בגוף - כך יגדל הקושי לשחזר את הגוף האורז באמצעות שיטת הסימון המוצעת.

שכלולה של השיטה ו/או מציאת דרך טובה ובהירה יותר, היא מטרה ראויה להמשך מחקר. ככל שנטיב לסמן את היריעות-רשתות, כך ייקל לתארן, גם עבור אלה שאינם עוסקים באופן ישיר בתחום.

BIBLIOGRAPHY

ביבליוגרפיה

- D.R.J. Chillingworth**, Differential topology with view to application, Pitman Publication London, San-Francisco, Melbourne, 1976
- Hilbert & Cohn-Vossen**, Geometry and the imagination, Chelsea Publication Company, New York, 1952
- H.S.M. Coxeter**, Regular Polytopes, Dover Publications, Inc., New York, 1973
- M. Burt**, Spatial Arrangement and Polyhedra with Curved Surfaces and their Architectural Applications, Technion, Haifa, 1966
- M. Burt**, The Wandering Vertex Method, Topologies Structural #6, 1982
- M. Burt**, Saddle Polyhedra and Close Packing, Zodiac – 22, Apr, 1973 - Italy
- Peter Gay**, The Crystalline State and Introduction, Oliver & Boyd Edinburgh, 1972
- A. Wachman M. Burt M. Kleinmann** Infinite Polyhedra, Technion – Israel Institute of Technology, Faculty of Architecture and Town Planning, Haifa, 1974
- א. וכמן מ. בורט מ. קלינמן, פוליהדרה אינסופיים הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, הפקולטה לארכיטקטורה ובינוי ערים, חיפה, 1774
- A. Korren**, Periodic 2-manifolds surfaces Which Divide the Space into Two Identical Subspaces, M.sc theses, Technion – I.I.T., Haifa, 1993.

M. Burt A. Korren, Periodic Hyperbolic Surfaces and Subdivision of 3-Space.

Published in **Katachi U Symmetry**, Springer verlag, Tokyo Berlin Heidelberg New York, 1996.

M. Burt A. Korren, Self-Dual Space Lattices and Periodic Hyperbolic Surfaces,

Published in Symmetry: Natural and Artificial, Extended Abstracts, 1 Hungary Akaprint Ltd., Budapest, 1995.

A. Korren M. Burt, The E.P.R. Approach to Subdivision of Space into Two

Identical Subspaces, Order Disorder, Fourth interdisciplinary congress and exhibition of the international society for the interdisciplinary of symmetry (ISIS – Symmetry), Technion, Haifa, 9.1998.

A. Korren, Identical Dual Lattices and Subdivision of Space, Art and Science, Fifth

interdisciplinary Symmetry Congress and Exhibition, Sydney, Australia, July, 2001, Visual Mathematics Volume 3, No. 4, 2001