

3 שיטת איתור ומיון היריעות

3.1 הקשר בין תכונות היריעות וחבורות הסימטרייה

מאפייני היריעות המבוקשות, כפי שהובאו לעיל, הובילו לפיתוחה של שיטה לאיתור ומיון היריעות. היריעות מאופיינות כ"מחזוריות" דהיינו: מורכבות מיחידות חוזרות. תכונה זו קושרת בין היריעות לבין חבורות הסימטרייה הפועלות במרחב.

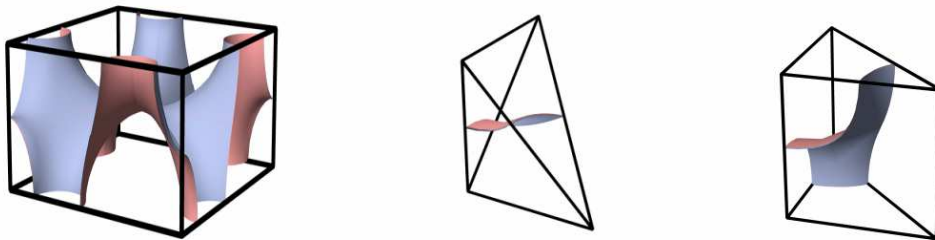
חבורת סימטרייה היא צירוף של אופרציות סימטרייה הפועלות בנקודה במרחב. הנקודות במרחב אשר בכל אחת מהן פועלת חבורת הסימטרייה מסודרות במערך מחזורי המתארות רשת מחזורית אינסופית. מספר הצרופים השונים של אופרציות הסימטרייה במרחב הוא סופי, ועומד על 230 צרופים, אשר ידועים כ-230 חבורות הסימטרייה במרחב. כל אחת מ-230 חבורות הסימטרייה מגדירה רשת נקודות שונה. רשתות אלה ידועות כ"רשתות קריסטלוגרפיות". הרשת הקריסטלוגרפית מהווה פלטפורמה לכל מערך מחזורי מסודר.

"מחזוריות" משמעותה, קיומה של יחידת מרחב בסיסית, אשר אינה ניתנת לחלוקה נוספת ע"י אופרציית סימטרייה. יחידת מרחב בסיסית זו (E.P.R. - Elementary Periodic Region) מייצגת, בתוכה, את כל תכונות מרחב הרשת.

"מרחב בסיסי", המייצג מרחב, אשר אחת מן היריעות הנדונות נמצאת בו, יכול בתוכו "פיסת יריעה בסיסית" המייצגת יריעה זו.

3.2 איתור "יחידות המרחב הבסיסיות" העשויות להכיל "פיסות יריעות בסיסיות"

"פיסת יריעה בסיסית" של יריעה המחלקת את המרחב לשני תת מרחבים זהים, מחלקת את נפחו של ה"מרחב הבסיסי", המייצג מרחב זה, לשני נפחים זהים-משלימים (ציור 9).

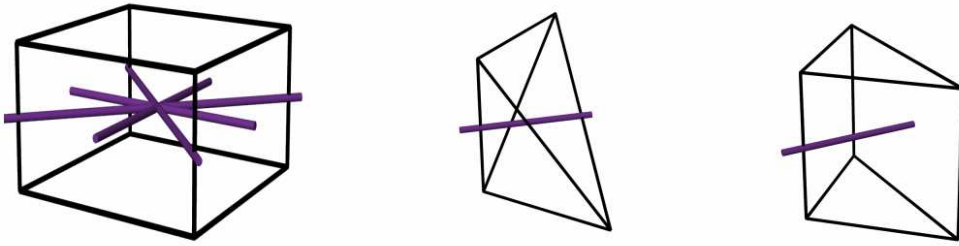


ציור 9 - מרחבים בסיסים טיפוסיים ופיסת היריעה המחלקת את נפחם לשני נפחים זהים

Typical E.P.R.s and the periodic surface, which divides them into two identical volumes.

"פיסת יריעה בסיסית" הנמצאת בתוך ה"מרחב הבסיסי" תכיל בתוכה אופרציית סימטרייה המעבירה נפח אחד לתוך הנפח הזהה-משלים לו. סימטרייה זו היא כאמור ציר או מספר צירי 2-fold (סיבוב של 180°) העוברים בתוך ה- E.P.R. ומסובבים אותו לתוך עצמו.

ה"מרחביים הבסיסיים" המכילים ציר או מספר צירי 2-fold המסובבים אותו לתוך עצמו עשויים להכיל בתוכם "פיסת יריעה בסיסית" (ציור 10).



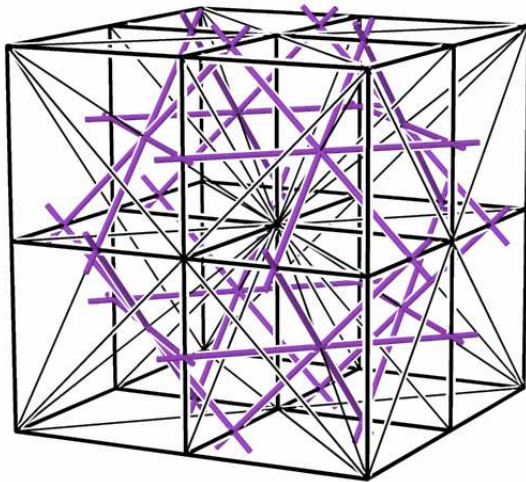
ציור 10 - מרחבים בסיסיים טיפוסיים המכילים צירי 2-fold

Typical E.P.R.s which contain 2-fold axes

על פני המרחבים הבסיסיים המכילים צירי 2-fold, המסובבים אותם לתוך עצמם, נאתר צירי 2-fold, המסובבים אותם לתוך מרחב בסיסי שכן. המרחבים הבסיסיים, עם צירי ה-2-fold הנוספים על פניהם, עשויים להוביל לאיתורן של רשתות 2-fold, נוספות, העשויות להכיל (או להיות מוכלות) ביריעות דו-ממדיות חלקות ומחזוריות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

3.3 איתורה של "פיסת היריעה הבסיסית"

שכפולו של ה-E.P.R, המכיל ציר או מספר צירי 2-fold המסובבים אותו לתוך עצמו, יוביל ליצירת רשת מרחבית של צירי 2-fold (ציור 11).

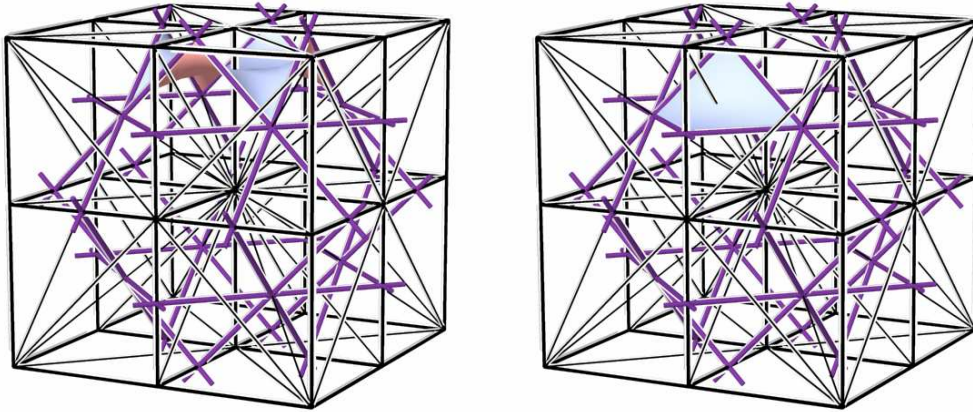


ציור 11 - רשת 2-fold
2-fold network.

רשת צירי ה-2-fold היא רשת מחזורית (נוצרה ע"י שכפול של קטע מחזורי). ברשתות אלה ניתן למצוא מספר רב של יחידות מחזוריות שונות, החל בקטע רשת הבסיסי הכלוא בתוך יחידת "המרחב הבסיסי" ועד לתא הניתן לשכפול ע"י הזזה בלבד. אנו נאמר שגדל היחידה המחזורית תלוי בדרגת המחזוריות של היחידה. היחידה הבסיסית ביותר (המוכלת בתוך ה-E.P.R) היא יחידה בעלת מחזוריות

גבוהה ביותר ואילו כפולות של היחידה הנ"ל, עד לגודל של יחידת הזזה, הן בעלות דרגת מחזוריות נמוכה יותר.

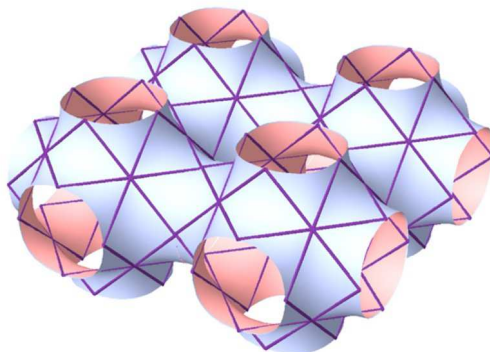
בין כל היחידות המחזוריות של רשת צירי ה-2-fold, קיימת יחידה בעלת תא מחזורי סגור המורכבת מקטעי צירי ה-2-fold (ציור 12).



ציור 12 - תאים מחזוריים סגורים ופיסת היריעה הכלואה בתוכם

Periodic closed cells and the minimal 2-manifold unit bounded by them.

בחקירת המאפיינים של היריעות החלקות, המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, נוכחנו לדעת כי היחידות המחזוריות של רשת ה-2-fold, מהוות את הגבול של היחידות המחזוריות של היריעה. דהיינו: קטע מחזורי של היריעה כלוא בתא המחזורי הסגור של רשת ה-2-fold. איתור התא המחזורי הסגור ברשת צירי ב-2-fold ופיסת היריעה החלקה הכלואה בתוכו ושכפולם ע"י אופרציות סיבוב 2-fold תוביל ליצירת יריעה מחזורית חלקה המחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים זהים (ציור 13).

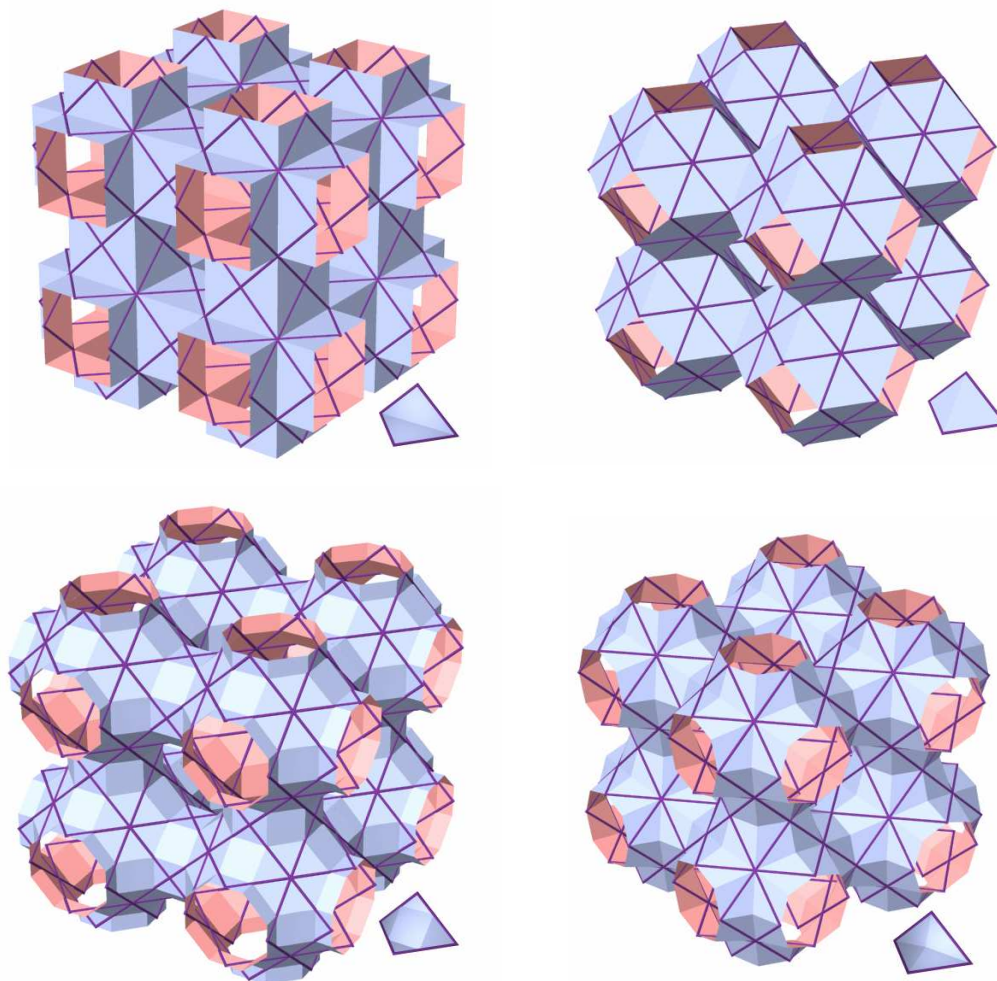


ציור 13 - קטע יריעה המתקבל משכפול תא מחזורי סגור המכיל פיסת יריעה בסיסית

Part of a 2-manifold which results from the duplication of a closed periodic cell containing a periodic 2-manifold unit.

נרחיב ונאמר שכל מוטיב אשר נכלא בתוך התא המחזורי הסגור של רשת צירי ה-2-fold, יוביל למשטח מחזורי המחלק את המרחב לשני תת-מרחבים זהים.

המוטיבים אפשריים:
 המשטח המינימלי הכלוא בתוך התא הסגור.
 קטע פוליהדרלי, המוביל ליצירת פוליהדרה אינסופית.
 קטע משטח העשוי מפאות משוריות, העשוי להוביל ליצירת פוליהדרה אינסופית לאו דווקא בעלת פאות רגולריות.
 כל קטע משטח שהוא רגולרי או בעל נקודות סינגולריות (ציור 14).

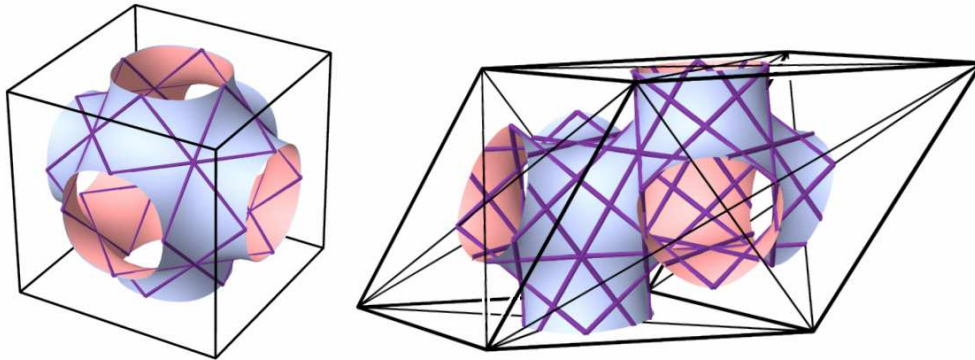


ציור 14 - פוליהדרה שונים כתוצאה משכפול תא מחזורי סגור של צירי 2-fold המכיל מוטיבים שונים
Different polyhedra, which are the result of the duplication of the 2-fold closed cell that has different motives.

3.4 מיון טופולוגי של היריעות

שיטת איתורן של היריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים, מובילה למציאתן של יריעות רבות, אשר חלקן דומות מבחינה טופולוגית.

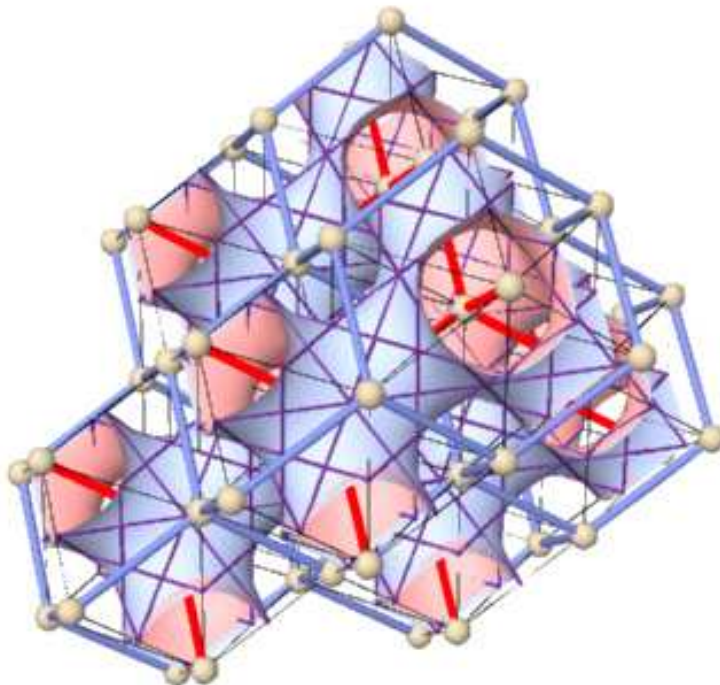
קיימים שני מאפיינים פיזיים ליריעות הנדונות: האחד - צורת תא ההזזה של היריעה, והשני - צורתם הגיאומטרית של שני תת-המרחבים משני צדי המשטח (ציור 15).



ציור 15 - תא הזזה טיפוסיים של יריעות המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים

Typical translation cells of 2-manifolds which divide the space into two identical subspaces

היריעה מחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים דמויי מבוך של שתי מנהרות המשכיות המפותלות ומשולבות זו בזו. צירי המנהרות מהווים רשת מחזורית, המשכית, אשר מכונה "רשת המנהרות". היחס בין שתי הרשתות הוא דואלי-משלים (dual-complimentary) וכל אחת ניתנת להגדרה באמצעות השניה (ציור 16).



ציור 16 - שתי רשתות מנהרות דואליות זהות והיריעה המפרידה ביניהם

Two identical dual tunnel networks and the 2-manifold surface separating between them

שני המאפיינים שהוצגו לעיל נובעים בעצם האחד מן השני. שכולו של תא ההזזה של היריעה יוביל ליצירה של היריעה אשר מחלקת את המרחב לשני תת-מרחבים דמויי המנהרות, ולהפך.

יישנו קשר חד חד ערכי בין תא הזזה טיפוסי לבין רשתות המנהרות. יריעות הנראות לכאורה שונות זו מזו וכן "פיסות יריעה בסיסיות" הכלואות בתוך "מרחבים בסיסיים" שונים, עשויות להיות מאופיינות ע"י רשתות מנהרות דומות ובהכרח – להוביל לתא הזזה טיפוסי דומה. יריעות המאופיינות ע"י רשת מנהרות דומה, הן דומות מבחינה טופולוגית.

מיון היריעות על פי רשתות המנהרות או תא ההזזה הטיפוסי, מוביל לאיתורן של היריעות אשר שונות טופולוגית זו מזו.

3.5 סיכום שיטת איתור ומיון היריעות

שיטת איתור היריעות בנויה מצעדים עוקבים (שלבים) כאשר כל צעד מקדם אותנו אל המטרה ומצמצם את תחום החיפוש.

ביצוע כל אחד משלבי השיטה מוביל בסופו לאיתורן של כל היריעות החלקות, המחלקות את המרחב לשני תת-מרחבים זהים. יריעות חלקות הן יריעות אשר קטע המשטח שלהן, הכלוא בתוך התא הסגור של "רשת צירי ה-2-fold" הוא המשטח המינימלי. בין היריעות שתמצאנה, תהיינה יריעות שנראות לכאורה שונות, ואולם הן זהות טופולוגית.

שלבי שיטת איתור היריעות :

- א. איתורם של המרחבים הבסיסיים המוגדרים ע"י חבורות הסימטרייה הפועלות במרחב האוקלידי.
- ב. איתורם של המרחבים הבסיסיים (מתוך המרחבים שאותרו בשלב א', המכילים בתוכם צירי 2-fold המסובבים אותם לתוך עצמם. דהיינו, עשויים להכיל "פיסות יריעה" המחלקות את נפחם לשני נפחים זהים-משלימים).
- ג. מציאת רשתות צירי ה-2-fold הנוצרות כתוצאה משכפולם של המרחבים הבסיסיים אשר אותרו בשלב ב'.
- ד. איתור תא מחזורי סגור ברשת צירי ה-2-fold ומציאת פיסת היריעה הבסיסית הכלואה בתוכו.
- ה. שכפול התא הסגור עד לקבלת קטע משטח של היריעה המאפשר זיהוי של רשת המנהרות ו/או תא הזזה טיפוסי.
- ו. הגדרת רשתות המנהרות הזהות-משלימות (דואליות).
- ז. הצגת המרחב הבסיסי הכולל את הייצוג של צירי ה-2-fold, פיסת היריעה וזוג הרשתות הדואליות.
- ח. מיון היריעות על פי רשתות המנהרות הדואליות השונות זו מזו.